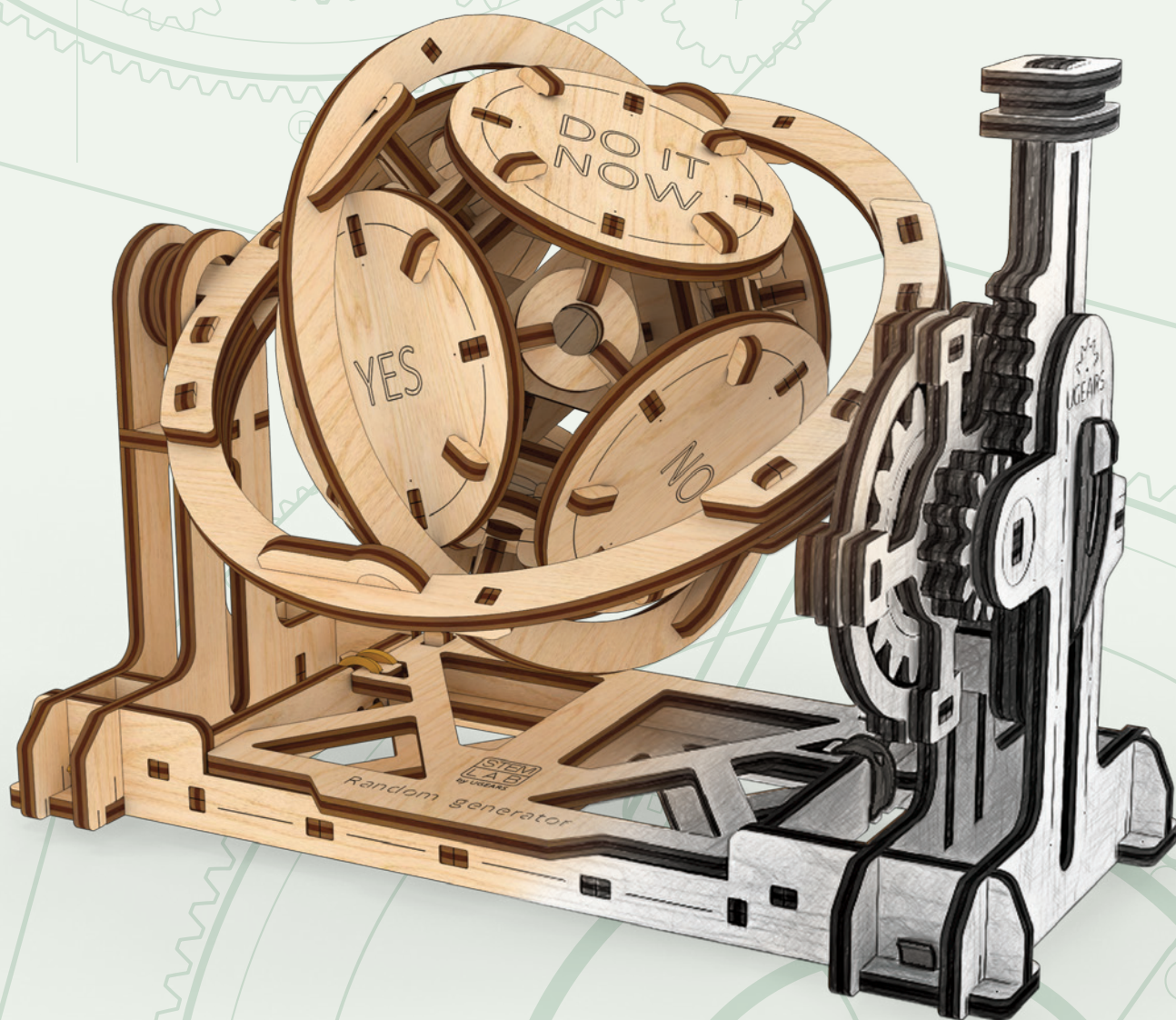


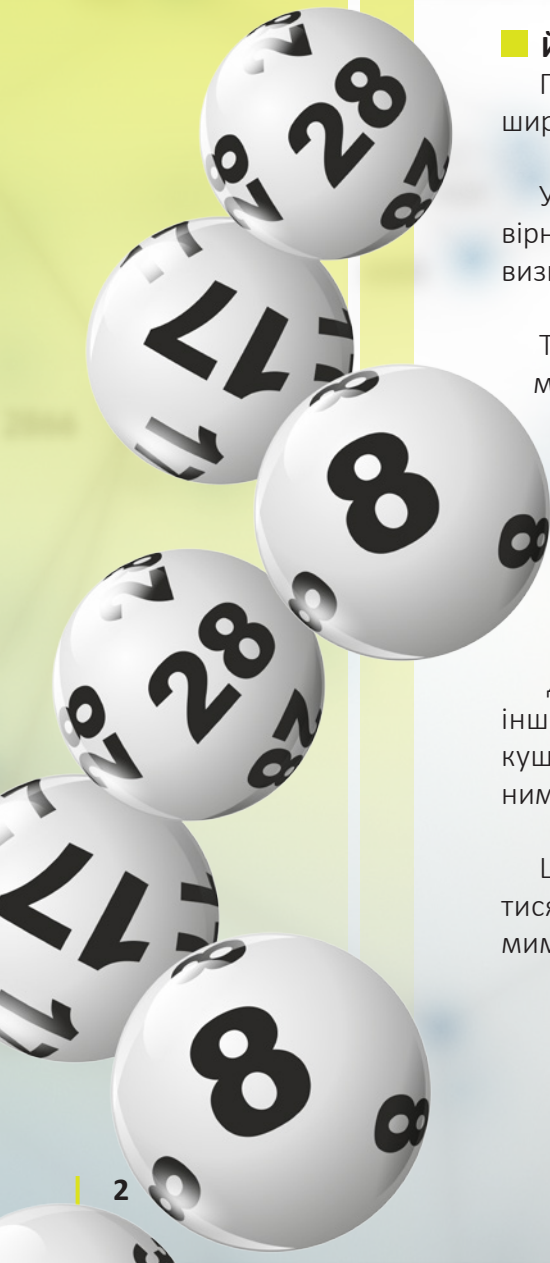
МЕХАНІЧНА МОДЕЛЬ

РАНДОМАЙЗЕР



Довідник юного механіка

Вступ



Щоб зрозуміти, як відбувається жеребкування, спершу необхідно розібратися, що таке ймовірність події та як її знайти. А для цього давайте познайомимося з основними поняттями теорії ймовірностей.

§2

Історія виникнення теорії ймовірностей

По суті, теорія ймовірностей є однією з найсучасніших наук, вона з'явилася в новий час і не має античних попередників.

Розвиток цієї науки переважно пов'язаний із розвитком азартних ігор. Пізніше вона стала застосовуватися в демографічних дослідженнях, страхуванні, а також в прикладних науках.

У сучасному світі практично в кожній сфері людської діяльності так чи інакше використовуються методи теорії ймовірностей.

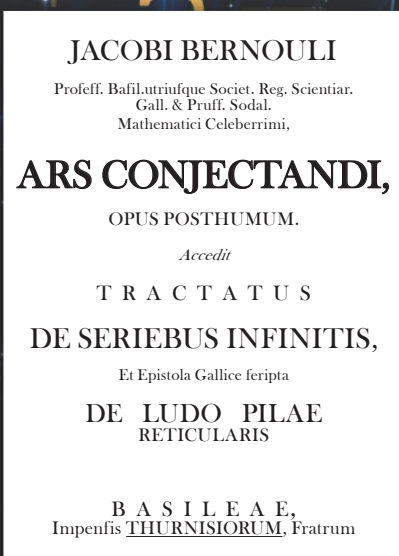
Однією з перших праць із теорії ймовірностей стала книга Якоба Бернуллі «Мистецтво припущень» (1713 рік). У ній вчений запропонував класичне визначення ймовірності випадкової події.



*Раніше математики найчастіше оперували кількістю випадків; історики вважають, що заміна кількості на частоту (тобто поділ на загальну кількість випадків) була стимульована статистичними міркуваннями: частота, на відміну від кількості, зазвичай має тенденцію до стабілізації при збільшенні числа спостережень.



Якоб Бернуллі



Праця Бернуллі



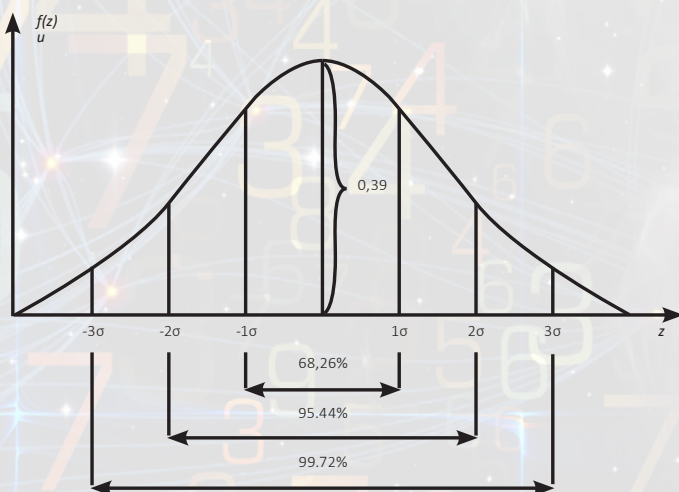
Йоганн Карл Фрідріх Гаусс

Визначення ймовірності «по Бернуллі» відразу стало загальноприйнятим, його відтворювали Абрахам де Муавр в книзі «Вчення про випадки» (1718) і всі наступні математики. Єдине важливе уточнення – про те, що всі «елементарні результати» мають бути рівноймовірними – зробив П'єр-Симон Лаплас у 1812 році. Якщо неможливо визначити класичну ймовірність події (наприклад, через відсутність можливості виділити рівноймовірні результати), то Бернуллі запропонував використовувати статистичний підхід. Тобто оцінювати ймовірність за результатами спостережень за цією подією або пов'язаними із нею подіями.

У першій частині свого трактату Бернуллі повністю передруковує книгу фізика Християна Гюйгенса, якій він дає найвищу оцінку, та істотно доповнює власними коментарями. Бернуллі докладно викладає комбінаторику та на її основі вирішує кілька завдань з випадковим вибором. В останній частині книги, що залишилася недописаною, Бернуллі збирався розглянути економічні та інші практичні застосування теорії ймовірностей.

Практичне застосування імовірнісних методів значно розширилося на початку XIX століття. Поняття ймовірності було визначене й для безперервних випадкових величин, завдяки чому з'явилася можливість застосовувати методи математичного аналізу.

Значний внесок у розвиток теорії ймовірностей зробив Йоганн Гаусс. Він займався астрономічними обчисленнями, розробив ймовірнісну методику роботи з вимірами, що містять похибки (1809). Остаточну версію теорії Гаусс виклав у двох працях «Теорія комбінації спостережень, схильних до випадкових помилок» (1823, 1828 роки). Його вклад у розвиток теорії ймовірностей настільки великий, що вчені протягом довгого часу використовували термін «закон Гаусса».



Графік щільності ймовірності нормального розподілу й відсоток потрапляння випадкової величини на відрізки, рівні середньоквадратичному відхиленню

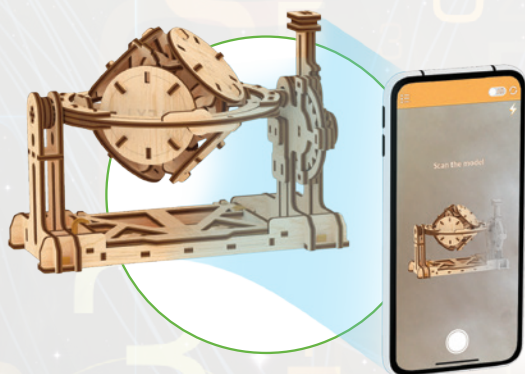
- 1 Відскануйте QR, щоб завантажити додаток UGEARS AR



- 2 Відкрийте додаток



- 3 Наведіть на зібрану модель і сумістіть її зображення на екрані з образом моделі у додатку



- 4 Взаємодійте в AR



Кожна механічна модель серії UGEARS STEM-лаб – це наочний навчальний посібник про те, як влаштований механізм і як він працює.

Складіть РАНДОМАЙЗЕР власноруч та дізнайтеся, як влаштований цей механізм і який принцип його роботи.

За допомогою спеціального додатку UGEARS AR пориньте у світ доповненої реальності. Наведіть смартфон або планшет на зібрану модель, щоб подивитися, де цей механізм використовується у реальному житті. Ви зможете взаємодіяти з моделлю на екрані, роздивитися механізм із різних ракурсів і побачити, як використовується РАНДОМАЙЗЕР для пошуку випадкових значень (отримайте випадкову відповідь на поставлене вами запитання).



Отримайте необмежену підтримку!

Якщо в процесі складання у Вас виникнуть запитання, команда Ugears завжди поруч і готова надати пораду та інженерну підтримку. Саме задля цього ми запровадили службу підтримки покупців, яка цілодобово приймає заявки і відповідає на них у найкоротші терміни.

Служба підтримки UGEARS:
customerservice@ugearsmodels.com

§3

Знаходження ймовірності події та генерація випадкових чисел



Для того, щоб розібратися, що таке теорія ймовірностей і як її практично використовувати, давайте розглянемо таке поняття як ймовірність події.

Якщо подія неможлива – її ймовірність дорівнює 0.

Якщо подія неминуче станеться (достовірна подія) – її ймовірність 1.

Якщо подія і не достовірна, і не неможлива – її ймовірність від 0 до 1.

Коли ми говоримо, що подія малоймовірна (наприклад, виграш великої суми в лотерею), це означає, що її ймовірність близька до нуля. У такому випадку потрібно зробити дуже багато спроб, щоб подія все ж відбулася.

І навпаки, коли ймовірність події висока (наприклад, прибуття поїзда в місце призначення в певний час) – її ймовірність близька до одиниці. У більшості випадків подія відбудеться – поїзд прибуде вчасно і не затримається.

Якщо не розглядати малоймовірні та достовірні події, то ймовірність решти подій можна охарактеризувати числом, що знаходиться в інтервалі від 0 до 1.

Так, наприклад, ймовірність випадання орла при підкиданні монетки дорівнює 0,5. Відповідно, ймовірність випадання решки також дорівнює 0,5, бо інших можливих подій, за цієї умовою, бути не може.



Давайте розглянемо більш детально гральні кістки і знайдемо ймовірність випадання однієї з шести граней куба. Згідно з визначенням, ймовірність цієї події дорівнює $1/6$ або $0,167$.

Як же знайти число, яке позначає ймовірність події?

І монетка, і гральна кістка – симетричні тіла. Тож для монетки дві можливі події мають однакову ймовірність. Ми достовірно знаємо, що підкинута монетка впаде, і впаде на одну з граней (неважливо, на яку).

Ймовірність цієї події дорівнює 1. Оскільки дві події – випадання орла чи решки – рівноймовірні (монетка симетрична), ділимо одиницю на два і отримуємо ймовірність $0,5$ для події (випадання одного з варіантів).

Розглянемо приклад із кубом. Ймовірність того, що впаде будь-яка з граней (з цифрами від 1 до 6) дорівнює 1. Оскільки всі події (випадання однієї з граней куба) рівноймовірні (куб симетричний), ділимо 1 на 6 і отримуємо ймовірність $1/6$ або $0,167$.

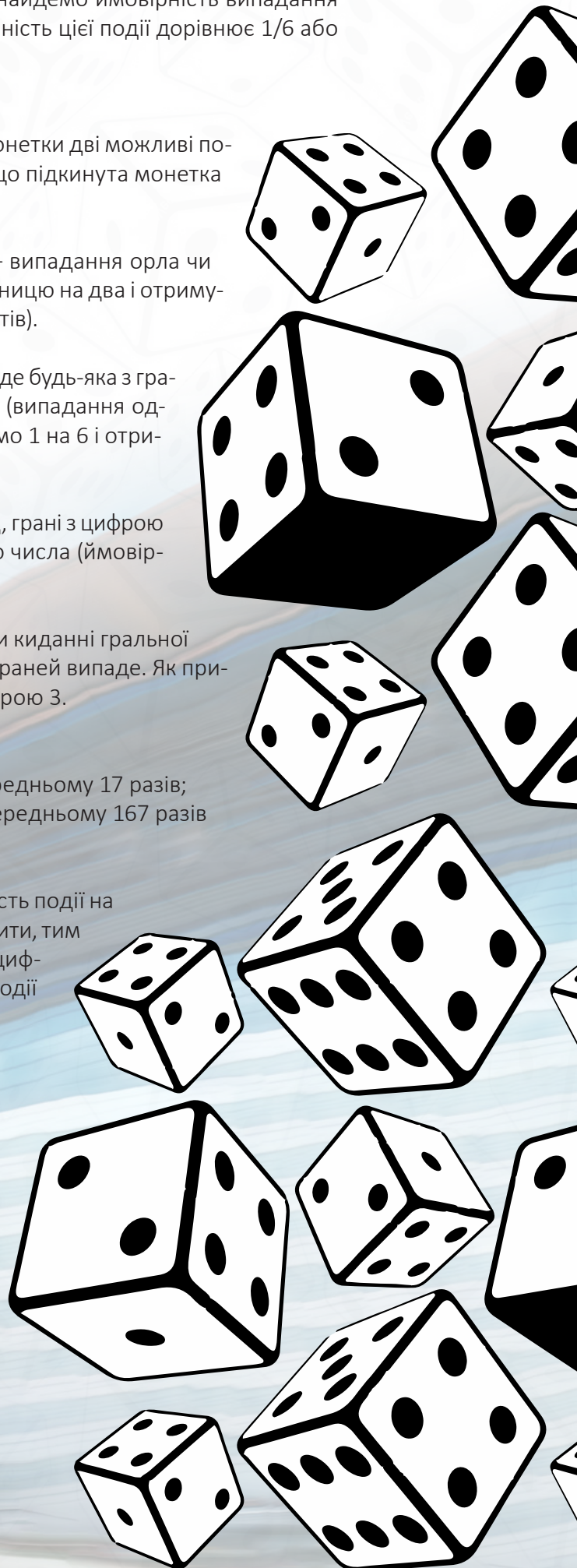
Тобто ймовірність випадання однієї з граней (наприклад, грані з цифрою 3) дорівнює $0,167$. Але яке практичне використання цього числа (ймовірності події)?

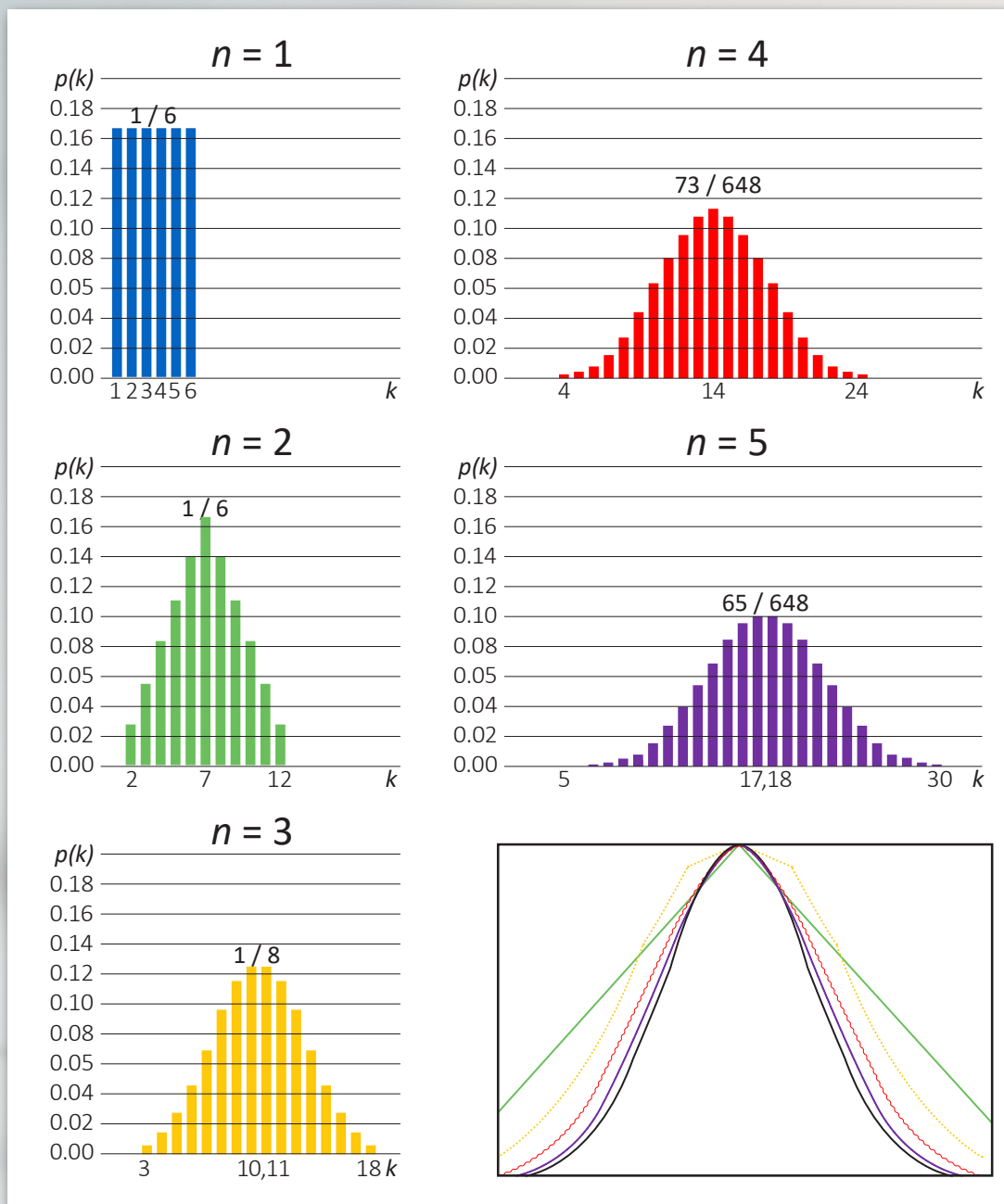
Неможливо напевно передбачити результат події – при киданні гральної кістки ми ніколи не можемо заздалегідь дізнатися, яка з граней впаде. Як приклад виберемо випадкову подію – випадання грані з цифрою 3.

Тоді ми можемо сказати наступне:

при 100 підкидуваннях грань із цифрою 3 впаде в середньому 17 разів;
при 1000 підкидуваннях грань із цифрою 3 впаде в середньому 167 разів
тощо...

Все, що нам потрібно зробити, це помножити ймовірність події на число зроблених спроб. І чим більше спроб ми будемо робити, тим більше отриманий результат (кількість випадань грані з цифрою 3) буде близький до передбаченого. Тож ймовірність події показує, наскільки часто ця подія буде відбуватися.





Теорія ймовірностей дозволяє також передбачити результат декількох послідовних подій або декількох подій, що повинні відбутися одночасно, якщо попередньо відома ймовірність кожної з них.

Монетки, гральні кістки та інші механічні пристрої дають можливість провести чесне жеребкування – незалежно ні від кого вибрати одну людину або одну команду з безлічі.

Для практичної генерації випадкових чисел можуть використовуватися інші механічні пристрої. А в сучасних комп'ютерах для цього застосовуються спеціальні мікросхеми, здатні генерувати випадкове число з будь-якого діапазону (від 1 до 100 або від 1 до мільйона) і виконувати ці операції дуже швидко (буквально за мілісекунди).

§4

Практичне використання Рандомайзера UGEARS

Один із основних елементів механічної моделі Рандомайзер від UGEARS – октаедр із шістьма вершинами, на кожній із яких є диски з написами: YES, NO, LATER, TRY AGAIN, DO IT NOW, BETTER NOT TELL YOU.

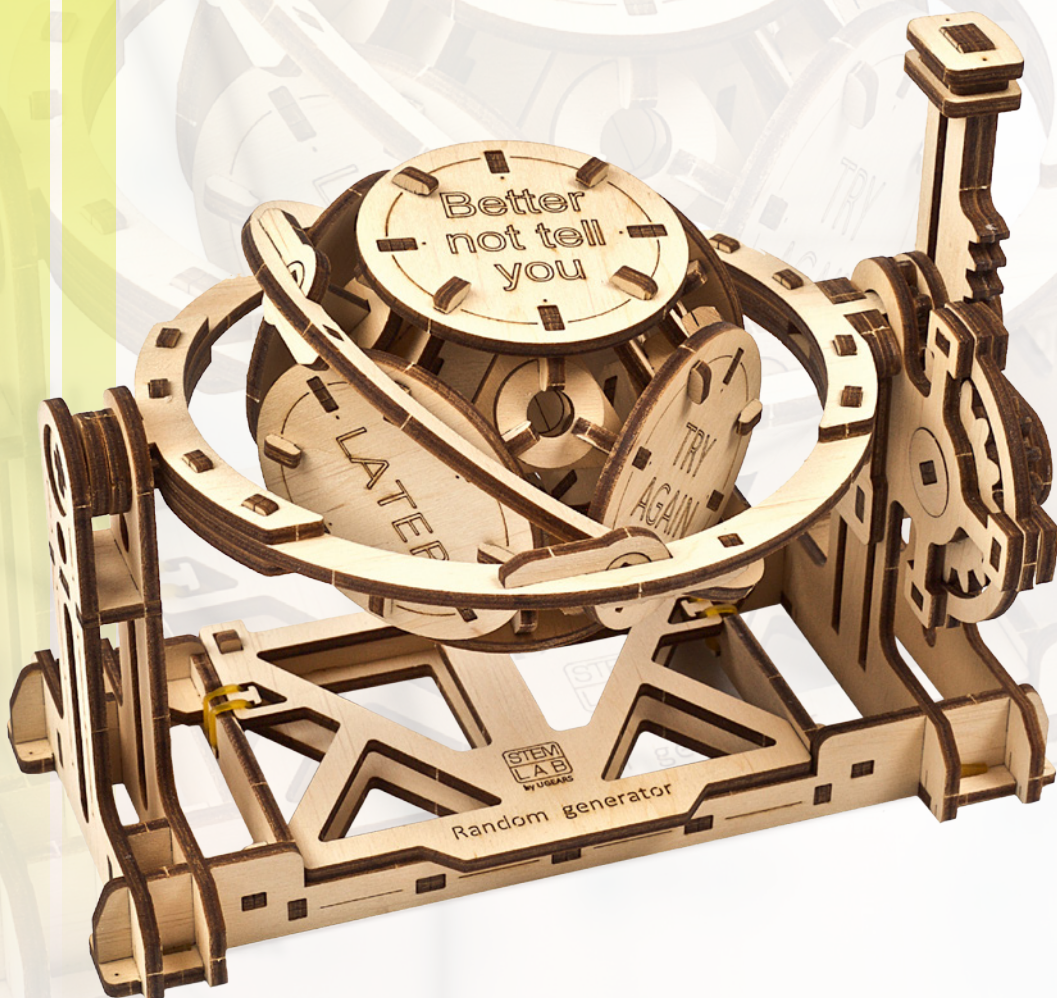
Конструкція влаштована так, що кожній із вершин, яка виявилася внизу, відповідає вершина, яка розміщена вгорі. Оскільки диски на вершинах мають однаковий розмір і вагу та розміщені симетрично по відношенню до центру мас, випадання будь-якого з написів є рівноймовірним.

Нагадаємо, для того, щоб порахувати число подій при проведенні певної кількості дослідів, необхідно помножити ймовірність події на число зроблених спроб.

Наприклад, при проведенні серії з 60 дослідів табличка з написом YES випаде в середньому 10 разів. Якщо провести 600 дослідів, табличка з написом YES випаде в середньому 100 разів тощо. Причому чим більше дослідів ми проведемо, тим менше буде розбіжність між передбаченим результатом і реально отриманим.

Повернемося до поняття ймовірності події та знайдемо ймовірність того, що одна з вершин октаедра випаде. Напевно відомо, що під дією сили тяжіння випаде одна з вершин, і ймовірність цієї події – 1.

Оскільки октаедр симетричний і має можливість вільно обертатися навколо свого центру мас, ймовірність того, що випаде одна з вершин – однакова. Таким чином, щоб знайти ймовірність того, що випаде будь-яка з вершин, потрібно розділити 1 на 6. У результаті отримаємо ймовірність події – $1/6$ або 0,167.



§5

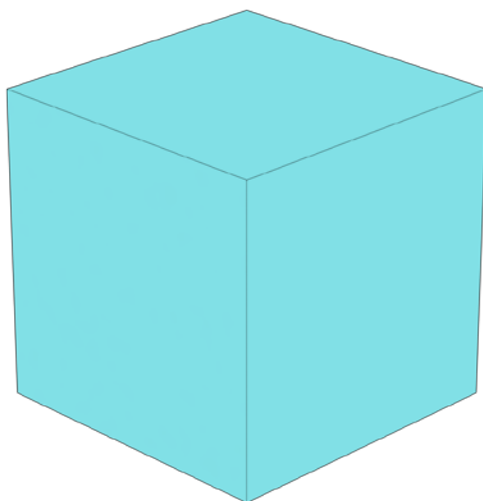
Механічний Рандомайзер UGEARS

Для того, щоб розібратися, як працює пристрій, необхідно звернутися до геометрії.

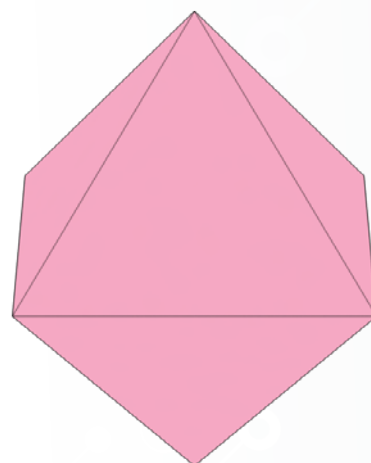
Давайте розглянемо два правильних багатогранника: куб і октаедр.

Куб – це правильний багатогранник, всі грані якого є квадратами. Він складається з 6 граней, які утворюють 8 вершин.

Октаедр – це правильний багатогранник, всі грані якого є рівносторонніми трикутниками. Всього він містить 8 граней і 6 вершин. (Рис. 1)



куб



октаедр

Рис. 1

Куб і октаедр дуальні один одному. Якщо поставити крапки в серединях квадратних граней куба, то вони будуть вершинами поміщеного в нього октаедра. І навпаки – якщо поставити крапки в серединях трикутних граней октаедра, то вони будуть вершинами поміщеного всередину куба (див. Рис. 2).

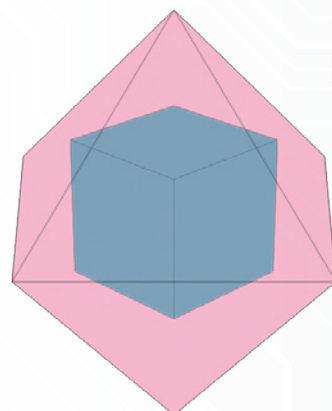
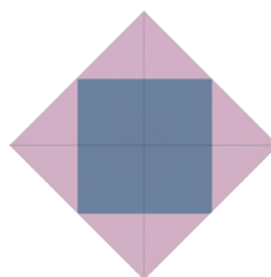
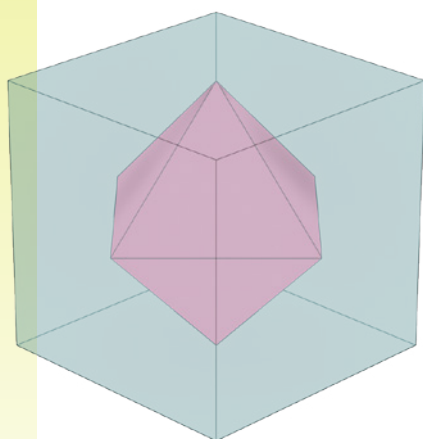
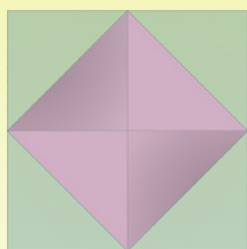


Рис.2

А тепер уявімо октаедр, який є порожнім всередині. Виготовимо цей октаедр з легкого матеріалу (наприклад, з дерева) і помістимо всередину важку залізну кульку, вага якої значно перевищує вагу октаедра. Але за розміром кулька повинна бути значно меншою, ніж розмір внутрішньої порожнини октаедра.

Подивімося на конструкцію Рандомайзера. Всередині розміщено октаедр із тягарцем (залізна кулька), який є набагато меншим за октаедр, що дає йому можливість при поворотах октаедра вільно перекочуватися всередині. А при потраплянні кульки в одне з шести заглиблень октаедра, що утворені стінками сусідніх граней, вона отримає стійке положення в просторі, відповідно, октаедр теж.

Можливість вільно обертатися після сильного поштовху (спричиненого, наприклад, спеціальним механічним пристроєм) октаедру дає Карданів підвіс. Обертання призводить до того, що одна з вершин опускається вниз.

Спробуємо різко обертати октаедр, щоб у металевої кульки була можливість довільно рухатися всередині. Оскільки октаедр є симетричним, а кулька рухається як завгодно під дією сильного поштовху всередині октаедра, то в результаті вона може опинитися в одному з 6 заглиблень. Під дією сили тяжіння вершина октаедра, що утворює поглиблення, в якому опиняється металева кулька, з часом виявиться внизу (або ж кулька перекотиться в одне з поглиблень, яке виявилось знизу).

Як відомо, вільне тіло в просторі має 6 ступенів свободи: 3 ступеня свободи – це переміщення по 3 осях (x , y , z) і ще 3 ступеня свободи – це обертання навколо цих трьох осей. Ці осі можуть бути розміщені в просторі довільно, але повинні бути перпендикулярні одна одній.

Для того, щоб октаедр міг вільно обертатися в просторі, потрібно всього лише забезпечити йому можливість обертатися навколо трьох взаємно перпендикулярних осей, причому ці осі обертання повинні проходити через його центр мас (що співпадає з геометричним центром). В іншому випадку частина октаедра, розміщена вище осі обертання, і частина октаедра, розміщена нижче, будуть різними за вагою. За рахунок цього під дією сили тяжіння важча частина октаедра завжди буде опускатися вниз, що не дасть йому вільно обертатися навколо однієї або декількох осей.

Для того, щоб забезпечити можливість обертання октаедра навколо однієї осі, він встановлюється в першу рамку і кріпиться до неї двома поворотними шарнірами (див. Рис. 3) так, щоб вісь обертання обох шарнірів була однією і тією ж і проходила через центр мас октаедра.

Таким чином ми забезпечили можливість вільного обертання октаедра навколо першої осі!

Шарнір, що утворює
першу вісь обертання

Перша рамка



Рис. 3

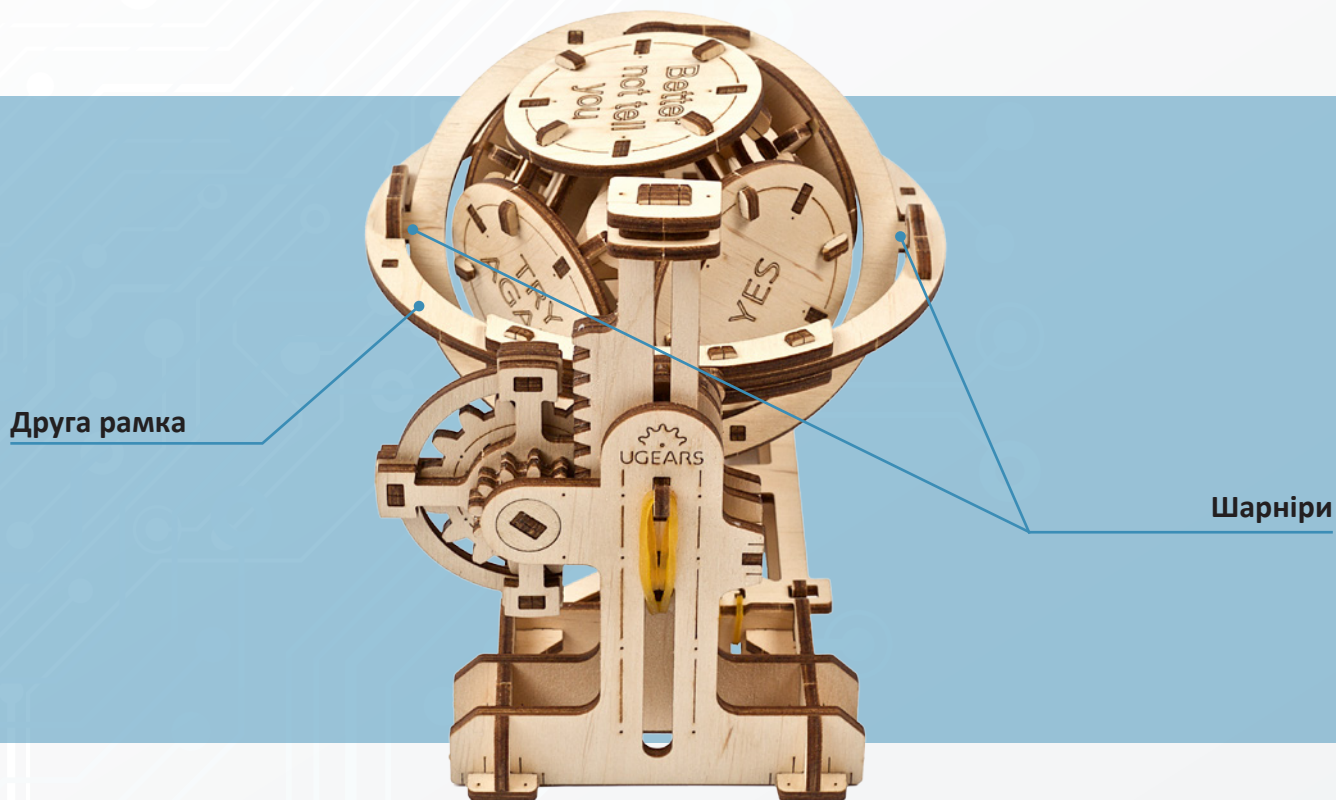


Рис. 4

Таким чином ми забезпечили можливість вільного обертання октаедра навколо першої осі! Але як же забезпечити можливість одночасного обертання октаедра навколо ще однієї осі?

Необхідно помістити першу рамку в другу рамку і з'єднати їх поворотними шарнірами так, щоб вісь обертання цих двох шарнірів була однією і тією ж і також проходила через центр мас октаедра (див. Рис. 4). Причому ця друга вісь обертання повинна розташовуватися під кутом 90 градусів по відношенню до першої осі.

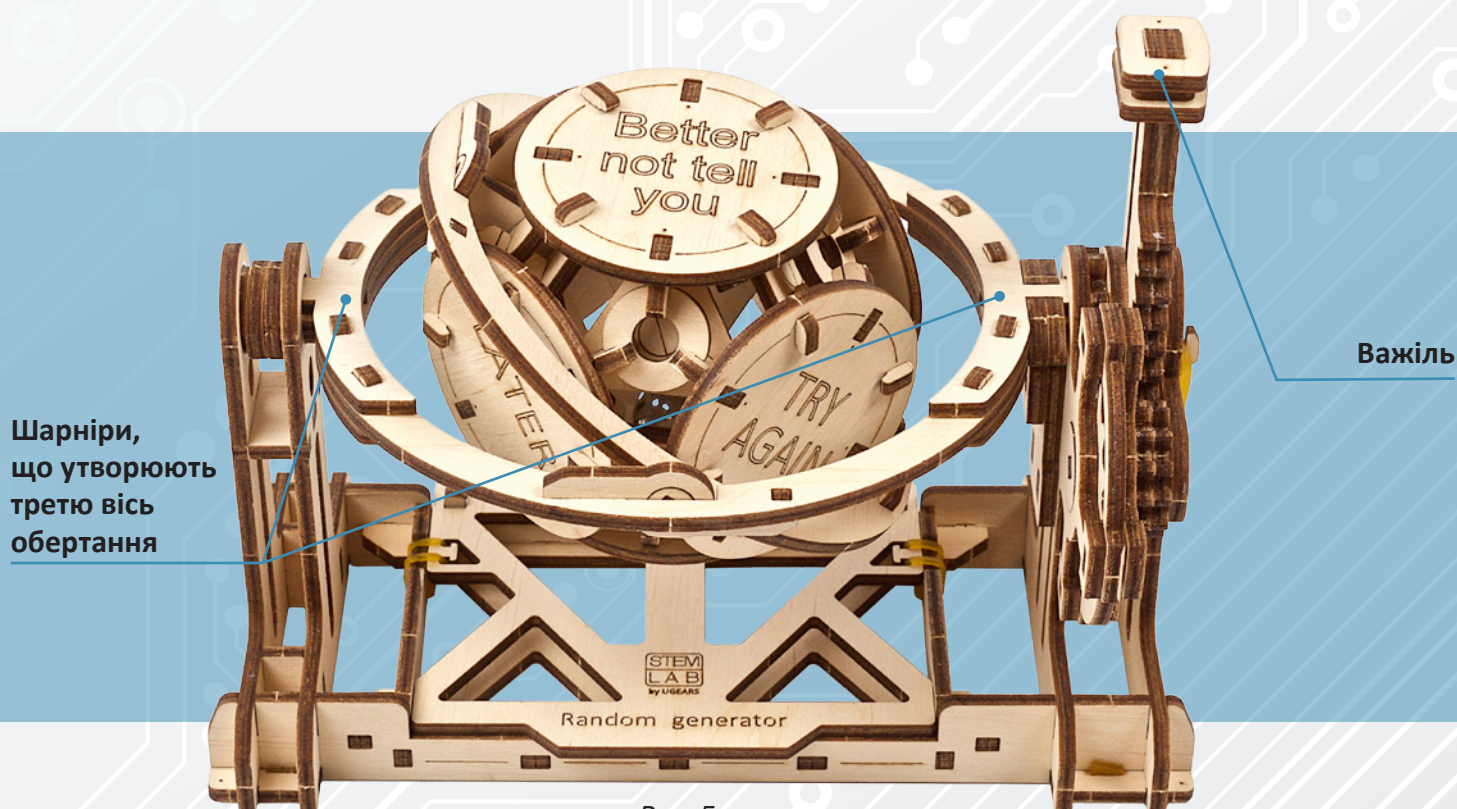


Рис. 5

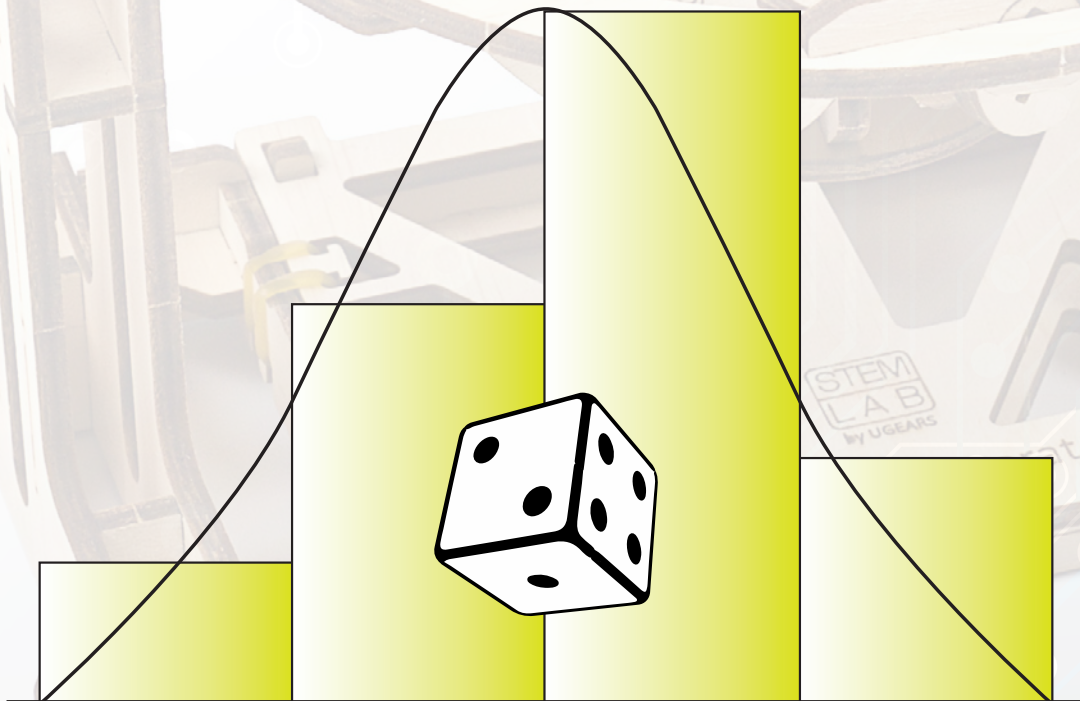
Для забезпечення можливості обертання октаедра навколо третьої осі (яка є перпендикулярною до перших двох осей) необхідно забезпечити з'єднання другої рамки аналогічним способом (за допомогою поворотних шарнірів) з корпусом пристрою. Вісь обертання, що утворилася, також повинна проходити через центр мас октаедра (див. Рис. 5).

Так в Рандомайзері UGEARS реалізується можливість вільного обертання порожнього октаедра в просторі – він може вільно обертатися навколо трьох взаємно перпендикулярних осей.

Для того, щоб запустити октаедр, потрібно натиснути спеціальний важіль (див. Рис. 5), який через зубчасту передачу забезпечує різке інтенсивне обертання другої рамки навколо третьої осі обертання. Під дією сильного поштовху починається обертання октаедра одночасно навколо всіх трьох осей. Після зупинки октаедр може виявитися в будь-якому просторовому положенні. Виходить, що під дією сили тяжіння будь-яка з вершин октаедра може опинитися внизу. Отже, після зупинки металева кулька опиниться внизу в одній із шести вершин октаедра. Всі осі обертання проходять через центр мас октаедра, тому ймовірність випадання будь-якої з вершин однакова.

І оскільки на вершинах октаедра закріплені диски з «відповідями», після зупинки ми можемо бачити на верхній грані випадково згенеровану відповідь.

Тепер ви розібралися, що таке ймовірність подій і як працює Рандомайзер.



§6

Практичні завдання

ТЕСТ

1. Що показує число, яке визначає ймовірність події?

- ☐ а) скільки потрібно зробити спроб, щоб випадкова подія відбулася
- ☐ б) залежність частоти події від кількості зроблених спроб
- ☐ в) частоту події

2. В яких межах змінюється ймовірність події?

- ☐ а) від 0 до 10
- ☐ б) від -1 до 1
- ☐ в) від 0 до 1

3. Яка ймовірність неможливої події?

- ☐ а) 0
- ☐ б) 1
- ☐ в) 10

4. Як приблизно розрахувати, скільки разів відбудеться випадкова подія, якщо відома кількість спроб і ймовірність цієї події?

- ☐ а) знайти суму кількості спроб і ймовірності події
- ☐ б) розділити кількість спроб на ймовірність події
- ☐ в) помножити кількість спроб на ймовірність події

Завдання 1.

Уявімо, що в Рандомайзері UGEARS октаедр замінений на ікосаедр (правильний багатогранник, складений із трикутників, який має 12 вершин) (див. Рис. 6). Якою є ймовірність випадання однієї з вершин?

Завдання 2*.

Уявімо гральну кістку у формі ікосаедра. Ми маємо можливість підкинути цю гральну кістку, в результаті вгорі опиниться одна з граней. На кожній грані ікосаедра є своя цифра (вони не повторюються) – 1,2,3 ... Необхідно знайти ймовірність випадання грані з цифрою 1.

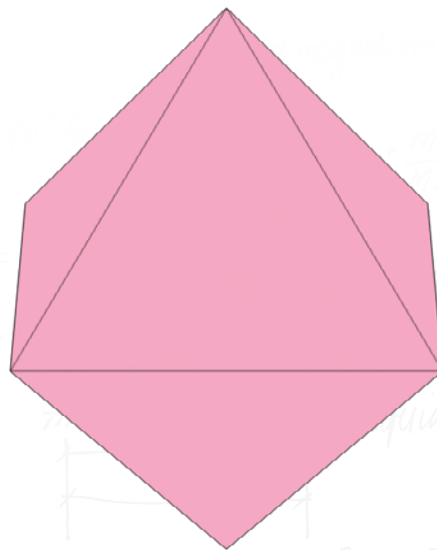


Рис. 6

Вітаємо, Ви це зробили!

Дякуємо, що Ви пройшли цей шлях із нами! Сподіваємося, що ця мандрівка у світ механіки була цікавою.